

Exordium: modelos de optimización

30 de agosto de 2026

Al conducir un vehículo, evitar girar a la izquierda en una intersección de doble vía, usando una ruta alternativa, puede ser más eficiente. Al menos, este parece ser el caso de UPS, una compañía de mensajería en Estados Unidos. Según un reportaje de 2017 [1], UPS habría ahorrado 10 millones de combustible, emitido 20 mil toneladas menos de dióxido de carbono y entregado 350 mil paquetes más al año con rutas optimizadas que observaban la política de no girar a la izquierda.

El caso anterior, del campo de la logística, es un problema de optimización. Permiten modelar problemas en los que, bajo un conjunto de restricciones, se busca identificar la mejor decisión. En particular me refiero acá a la optimización como un conjunto de aserciones y procedimientos matemáticos que permiten minimizar (o maximizar) un criterio de decisión. Me atrevo a afirmar que este enfoque es el esquema operativo central en las relaciones actuales de interdependencia.

Por ejemplo, en la microeconomía el precio óptimo es un monto intermedio entre lo que vendedor quiere cobrar y lo que el consumidor está dispuesto a pagar. En una fábrica, los cortes de material más eficientes son aquellos que producen la menor cantidad de desperdicio o que requieren el menor tiempo para su utilización. De manera similar, las noticias seleccionadas por los algoritmos de las redes sociales son aquellas con la mayor probabilidad de capturar la atención de los usuarios, según el perfil trazado de cada uno de ellos.

La optimización tiene un papel central en la forma en que funcionan nuestras sociedades. Es en la optimización matemática donde encuentran su expresión más operativa los paradigmas de la racionalidad instrumental y del cálculo utilitarista [2 y 3]. Así que, comprendiendo mejor cómo opera la optimización matemática, podemos entender mucho mejor como funcionan los mecanismos sociales que determinan en gran medida lo que podemos o no hacer.

Esta nota es una introducción a los modelos de optimización. Basado en Cornuejols y Reha (2018), retomo una definición básica y describo los principales tipos de problemas de optimización. Como caso de aplicación, reproduzco el modelo media-varianza de Markowitz para la optimización de portafolios. Sobre esa base, desarrollo un ejemplo con dos activos, y presento un programa escrito en C para resolverlo.

Definición básica

Optimización es el proceso para encontrar la mejor decisión satisfaciendo un conjunto de restricciones. Un problema de optimización tiene la forma de:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ s.t. } \begin{cases} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \\ h(\mathbf{x}) \leq \mathbf{d} \end{cases}$$

donde:

- $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ es el vector de las variables de decisión
- $f : R^n \rightarrow R$ es la función objetivo
- Las restricciones, que son expresadas como igualdades o desigualdades

Una *solución factible* es un valor de $\mathbf{x}$ que satisface las restricciones. La *solución óptima* es una solución factible que es la vez el mejor valor posible de la función objetivo, es decir un punto $\mathbf{x}'$ para el cual $f(\mathbf{x}') \leq f(\mathbf{x})$, para todos los $\mathbf{x}$ que son soluciones factibles.

Tipos de problemas

A continuación se mencionan diferentes problemas de optimización, dada la naturaleza de la función objetivo y las restricciones bajo las cuales se deben minimizar (o maximizar, según el caso).

Programación lineal: la función objetivo es lineal y a la vez, las restricciones son un conjunto finito de igualdades y desigualdades lineales.

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ s.t. } \begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} \geq \mathbf{d} \end{cases}$$

para los vectores $\mathbf{c} \in R^n$, $\mathbf{b} \in R^m$, $\mathbf{d} \in R^p$, y las matrices $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ y $\mathbf{D} \in R^{p \times n}$.

En algunos programas sociales, donde los beneficiarios atendidos y el impacto pueden ser cuantificados con alguna métrica razonable, la distribución del presupuesto se puede plantear como un problema de programación lineal. Se trata de maximizar el impacto agregado sujeto a un techo presupuestario y a coberturas mínimas para los grupos prioritarios. Por supuesto, implica asumir que los rendimientos son constantes y que los efectos cruzados no son significativos.

Programación cuadrática: Es una extensión de la programación lineal en la cual algunos de los términos de la función objetivo son cuadráticos.

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ s.t. } \begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} \geq \mathbf{d} \end{cases}$$

Por lo general se asume que la matriz $\mathbf{Q} \in R^{n \times n}$ es simétrica, por lo que $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{x}$, donde $\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T)$.

La función objetivo $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ es convexa si y solo si la matriz $\mathbf{Q}$ es positiva semidefinitiva, es decir, $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq 0$, $\forall \mathbf{x} \in R^n$.

Más adelante se desarrolla con detalle, como ejemplo, la optimización de portafolios mediante el uso de programación cuadrática. Se trata de encontrar cuánto

invertir en cada activo con el fin de maximizar la relación entre el retorno esperado y el riesgo del portafolio, medido por la dispersión de los retornos, bajo la restricción de que todo el capital se invierte en operaciones de largo (primero compra y luego venta).

Programación entera mixta: es un problema de optimización que restringe a que algunas o todas las variables de decisión toman valores enteros. Esto significa que $x_j \in Z$ y $j \in J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Un caso especial es cuando el modelo incluye variables binarias, lo que incrementa el poder del modelado, pero con costos en términos de manejabilidad computacional.

Un ejemplo de este tipo de optimización se encuentra en el diseño de jurisdicciones electorales. Se busca dividir el territorio en distritos de población aproximadamente igual, cumpliendo criterios de continuidad geográfica, compactidad territorial (forma geométrica simple) y representación proporcional de comunidades. Varios atributos se representan con variables binarias combinadas en restricciones de balance y topografía.

Optimización estocástica: se trata de problemas con variables aleatorias.

$$\min_{\mathbf{x}} \varrho(F(\mathbf{x}, \omega)) \text{ s.t. } \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

ϱ representa una medida de riesgo, por ejemplo la esperanza: $E(\mathbf{x}, \omega)$. En estos problemas, el conjunto de decisiones $\mathbf{x}$ deben realizarse antes que el resultado aleatorio ω ocurra.

Un ejemplo se encuentra en el diseño de algunos programas anti-pobreza, donde las transferencias condicionadas ocurren en presencia de riesgo de empobrecimiento por diversos factores. Dado que hay incertidumbre sobre el ingreso efectivo de cada hogar, el problema es estocástico ya que no puede ignorar la dispersión de las realizaciones posibles.

Los problemas de optimización pueden también incluir series temporales, que incluye la optimización estática y la multiperíodo. La primera corresponde a casos donde el futuro es modelado como una etapa única, mientras que en la segunda el futuro es una secuencia o un continuo de etapas.

Caso de aplicación

El modelo media-varianza de Markowitz (1952) para la optimización de portafolios, bajo el principio de diversificación, puede ser formulado como

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \gamma \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x} + \mu^T \mathbf{x}$$

El vector de variables de decisión $\mathbf{x}$ representa las proporciones entre los activos que forman parte del portafolio, sujetos frecuentemente a la restricción $\mathbf{1}^T \mathbf{x} = \mathbf{1}$,

es decir que las proporciones deben sumar 1. Otras restricciones pueden requerir que $x_i \geq 0$, es decir que solo se pueden tomar posiciones en largo. El término $\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}$ es la varianza del portafolio, como medida del riesgo, y $\mu^T \mathbf{x}$ es el retorno esperado. La constante de aversión al riesgo $\gamma > 0$ determina la relación opuesta entre retorno y riesgo.

Este modelo se basa en la idea de que si solo se conocen dos hechos sobre un activo, su retorno promedio y la dispersión esperada, entonces la mejor decisión de cuánto invertir queda determinada por la aversión al riesgo. Un inversionista con alta aversión elige un portafolio de baja varianza y en consecuencia de menor retorno, mientras que si tiene menor aversión al riesgo, entonces puede buscar más retorno, pero aceptando una mayor varianza. Bajo esa consideración, el modelo sirve para encontrar la mejor relación entre media y varianza.

Ejemplo

Asumiendo un inversionista tiene alta aversión al riesgo ($\gamma = 10$), que evalúa un portafolio con dos activos:

Retornos esperados:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.10 \end{bmatrix}$$

Matriz de covarianza:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.01 \\ 0.01 & 0.09 \end{bmatrix}$$

Restricción: todo el capital debe ser invertido, $\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1$ y solo se permiten posiciones en largo, $x_i \geq 0$.

Con esos datos, la volatilidad del portafolio, $\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}$, es:

$$\sigma_p^2 = 0.04x_1^2 + 2(0.01)x_1x_2 + 0.09x_2^2 = 0.04x_1^2 + 0.02x_1x_2 + 0.09x_2^2$$

El retorno del portafolio, $\mu^T \mathbf{x}$, es:

$$\mu_p = 0.05x_1 + 0.10x_2$$

Dado que $x_1 + x_2 = 1$, se puede sustituir $x_2 = 1 - x_1$ para dejar las expresiones previas en términos de una sola variable (x_1):

Sustituyendo en la varianza:

$$0.04x_1^2 + 0.02x_1(1 - x_1) + 0.09(1 - x_1)^2$$

$$0.11x_1^2 - 0.16x_1 + 0.09$$

Sustituyendo en el retorno:

$$0.05x_1 + 0.10(1 - x_1) = 0.10 - 0.05x_1$$

La función completa a minimizar es:

$$f(x_1) = \frac{1}{2}(10)(0.11x_1^2 - 0.16x_1 + 0.09) - (0.10 - 0.05x_1)$$

$$f(x_1) = 0.55x_1^2 - 0.75x_1 + 0.35$$

Para encontrar el punto donde se minimiza esta función, se toma la primera derivada respecto a x_1 y se iguala a cero:

$$\frac{df}{dx_1} = 2(0.55)x_1 - 0.75 = 0$$

$$1.10x_1 - 0.75 = 0$$

$$x_1 = \frac{0.75}{1.10} \approx 0.6818 \text{ (68.18\%)}$$

Dado que $x_1 + x_2 = 1$:

$$x_2 = 1 - 0.6818 = 0.3182 \text{ (31.82\%)}$$

Ambos valores son positivos, por lo que cumplen con la restricción de posiciones en largo.

Por lo tanto, de acuerdo con el modelo media-varianza de Markowitz, el inversionista debe colocar el 68.18% de su capital en el activo 1 and 31.82% de su capital en el activo 2.

Con el portafolio óptimo, el retorno esperado del portafolio es 6.59% con una varianza de 0.032. Es decir, un retorno intermedio pero con una varianza menor que la de cualquiera de los activos individuales, reflejando el hecho de que una apropiada diversificación reduce el riesgo.

Caja de herramientas

El ejemplo anterior puede ser sumariado con la siguiente expresión para el valor óptimo de x_1 :

$$x_1^* = \frac{\frac{\mu_0 - \mu_1}{\gamma} + \sigma_2^2 - \sigma_{1,2}^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}^2}$$

Esta formula, para la optimización de un portafolio con dos activos, puede ser automatizada con el siguiente código, donde los índices empiezan en 0 en lugar de 1, de acuerdo con las reglas de C, y la matriz de varianza es representada como un arreglo lineal.

```
#include <stdio.h>

typedef struct {
    int n_assets;
    double risk_aversion;
    double *mean;
    double *cov;
} Portfolio;

double get_x1_optimize_two_assets(Portfolio *pf) {
    double b = pf->cov[0] + pf->cov[3] - 2.0 * pf->cov[1];
    double a = ((pf->mean[0] - pf->mean[1]) / pf->risk_aversion) +
        pf->cov[3] - pf->cov[1];
    double x1 = a / b;
    return x1;
}

int main() {
    Portfolio pf = {
        .n_assets = 2,
        .risk_aversion = 10.0,
        .mean = (double[]){ 0.05, 0.10 },
        .cov = (double[]){
            0.04, 0.01,
            0.01, 0.09,
        }
    };

    double x1 = get_x1_optimize_two_assets(&pf);
    double x2 = 1.0 - x1;
    printf("Proporciones: x1=%.3f x2=%.3f\n", x1, x2);
    return 0;
}
```

Al compilarlo y ejecutarlo, se produce el siguiente despliegue:

```
gcc markowitz-two-assets.c -o markowitz-two-assets
./markowitz-two-assets
Proporciones: x1=0.682 x2=0.318
```

La salida concuerda con el resultado del ejemplo numérico.

Cierre

En esta nota he ofrecido una introducción a los modelos de optimización, presentado una definición básica y describiendo los principales tipos de problemas. Es más, el modelo media-varianza de Markowitz ilustra la conexión entre la formulación matemática, el análisis numérico y la implementación computacional.

Si un problema puede ser expresado en términos de una función objetivo y restricciones en forma de igualdades o desigualdades, es bastante probable que exista un algoritmo eficiente con el cual encontrar valores óptimos.

Referencias

- Cornuejols, Gerard, and Reha Tütüncü. Overview of Optimization Models. Optimization methods in finance, Ch. 1, pp. 3-10. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

Notas

1. Ver el artículo “Why UPS drivers don’t turn left and you probably shouldn’t either”, publicado por The Conversation (2017, Jan. 20).
2. En su obra “Economía y Sociedad”, cuando M. Weber explica la acción racional con arreglo a fines, en contraposición la acción guiada por los valores, las costumbres o las emociones, habla de quien sopesa “racionalmente los medios con los fines, los fines con las consecuencias implicadas y los diferentes fines posibles entre sí”.
3. M. Horkheimer y T. Adorno, en su obra “Dialéctica de la Ilustración”, escriben que “lo que no se doblga al criterio del cálculo y la utilidad es sospechoso para la Ilustración”, cuando sostienen que la razón al reducirse a un instrumento de cálculo, control y utilidad, se vuelve totalitaria y dogmática.